

Олександр Нешадим

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук
Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, Україна
ORCID ID 0000-0003-2275-4797
e-mail: om.neshchchadym@gmail.com

Олексій Зінкевич, Володимир Сафонов

кандидати фізико-математичних наук, доценти кафедри вищої математики,
Національний університет харчових технологій, Київ, Україна
e-mail: oleksazinkevich@ukr.net

АЛГОРИТМІЧНІ ПРОБЛЕМИ В ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКЕ ДЕФОРМУВАННЯ В'ЯЗКОПРУЖНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ТІЛА

Анотація. При розв'язуванні прикладних задач математичної фізики числовими методами успішно застосовується метод граничних інтегральних рівнянь, який переводить основні складності досліджень і числових розрахунків на деякі граничні інтегральні рівняння, які відносяться лише до границі заданої області і безпосередньо враховують граничні умови задачі. Такий підхід надає можливість відразу визначити невідомі величини на самій границі, не обчислюючи їх у всій області. Це вигідно відрізняє метод граничних інтегральних рівнянь від інших методів. Реалізація цього методу для конкретної задачі вимагає вирішення деяких математичних проблем.

По-перше, необхідно знайти (точно або наближено) фундаментальний розв'язок відповідного диференціального чи інтегро-диференціального рівняння задачі.

По-друге, потрібно вивести спеціальні функціональні співвідношення, які узагальнюють відомі із класичної теорії формули Гріна, що зв'язують інтеграли по досліджуваній області з потенціалами по межі цієї області.

По-третє, дослідити граничні властивості одержаних потенціалів.

Якщо перераховані математичні проблеми подолані, то розв'язок крайової задачі шукається у вигляді інтегралів, залежних від параметрів – незалежних координат точки цієї області. Такі інтеграли беруться по межі області, а підінтегральна функція є добутком фундаментального розв'язку на невизначені функції точок межі (щільності потенціалів). Підстановка таких інтегральних представлень шуканих розв'язків у граничні умови приводить до граничних інтегральних рівнянь відносно невідомих щільностей потенціалів. На практиці згадані щільності визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, якою наближено замінюють одержані інтегральні рівняння.

Метою досліджень була розробка методу чисельного розв'язання задач про плоскі деформації в'язкопружного циліндричного тіла максвелівського типу.

У статті для сформульованої задачі деформації отримано систему гранично-часових інтегральних рівнянь другого роду. Запропоновано алгоритм кроків за часом чисельного розв'язання такої системи граничних інтегральних рівнянь.

Ключові слова: в'язкопружність, ядро релаксації, модель Максвелла, функція релаксації, вязкопружний потенціал, фундаментальний розв'язок, щільність потенціалу, ядро інтегрального рівняння, рухома межа.

1. ВСТУП

Ефективні чисельні методи розв'язання прикладних задач про рух в'язкопружного матеріалу цікавлять як практиків, так і науковців. Одним із таких методів, який успішно себе зарекомендував, є метод граничних інтегральних рівнянь.

Загальне інтегральне представлення розв'язку лінійованих рівнянь Нав'є-Стокса у випадку рухомих границь наведено в монографії [1]. Інтегро-диференціальне представлення розв'язків рівнянь про рух однорідної рідини за моделлю Максвелла подано в праці [2]. В роботі [3] одержано граничні інтегральні рівняння про плоскі деформації в'язкопружного циліндричного тіла.

Метою дослідження є розробка ефективного алгоритму чисельного розв'язання задачі про деформування в'язкопружного циліндричного тіла максвелівського типу.

2. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ

Розглянемо циліндричне тіло поперечного перерізу $D(0)$, що складається з однорідного ізотропного в'язкопружного матеріалу із неперервною пам'яттю. Довільна точка M плоскої області $D(0)$ в момент часу $\tau > 0$ визначається радіус-вектором $\vec{y}(\tau) = \vec{e}^k y_k(\tau)$, тут $\{\vec{e}^1, \vec{e}^2\}$ - декартів базис.

Загальне напруження в матеріальній точці M за час $0 < \tau < t$ виражається тензором

$$P(\vec{y}(t), t) = \int_0^t \{ \hat{E} [kh(t - \tau) - \frac{2}{3} \mu q(t - \tau)] \text{div } \vec{v}(\vec{y}(\tau), \tau) + \\ + 2\mu q(t - \tau) \text{Def } \vec{v}(\vec{y}(\tau), \tau) \} d\tau.$$

де μ, λ, k - миттєво-пружні сталі; $\hat{E}$ - одиничний тензор; $\text{Def } \vec{v}(\vec{y}(\tau), \tau)$ - тензор швидкості деформації; $\vec{v} \equiv \vec{v}(\vec{y}(\tau), \tau)$ - вектор швидкості частинки M в момент часу

τ ; $\vec{\nabla} = \vec{e}^k \frac{\partial}{\partial y_k}$ - оператор Гамільтона; функції $q(t)$ і $h(t)$ характеризують реологічні

властивості матеріалу і називаються ядрами релаксації; вони визначені при $t \geq 0$, є невід'ємними і монотонно спадними. При дослідженні в'язкопружних (неньютонівських) рідин, до яких належать багато полімерних матеріалів або метали при високих температурах, широко застосовуються експоненціальні ядра релаксації (модель Максвелла):

$$q(t) = \frac{c}{\kappa} \exp(-\frac{t}{\kappa}); \quad h(t) = \frac{c_0}{\kappa_0} \exp(-\frac{t}{\kappa_0}),$$

де κ - час релаксації при зсуві, κ_0 - час релаксації при об'ємному розширенні; параметри $c, c_0 \in [0; 1]$.

Швидкості і зміщення частинок, що відбуваються в матеріальному тілі, вважаємо малими величинами. Квазістатичне рівняння руху даного в'язкопружного середовища набуває наступного вигляду:

$$\mu \Delta \vec{u}(\vec{y}, t) + (\lambda + \mu) \text{graddiv} \vec{u}(\vec{y}, t) - \int_0^t \{ \mu q(t - \tau) [\Delta \vec{u}(\vec{y}, \tau) + \text{graddiv} \vec{u}(\vec{y}, \tau)] - \\ - \left[\frac{2}{3} \mu q(t - \tau) - kh(t - \tau) \right] \text{graddiv} \vec{u}(\vec{y}, \tau) \} d\tau + \vec{f}(\vec{y}, t; \vec{u}) = \vec{0}, \quad (1)$$

тут

$$\vec{f}(\vec{y}, t; \vec{u}) = \rho_0 \vec{F}(\vec{y}, t) [1 - \text{div} \vec{u}(\vec{y}, t)],$$

$\vec{F}(\vec{y}, t)$ - інтенсивність масових сил; $\rho_0 = \rho(\vec{y}, 0)$ - густина речовини; Δ - оператор Лапласа.

Нехай в точках контуру $L(t)$ задано вектор напружень $\vec{p}_n(\vec{x}, t)$:

$$\vec{n} \cdot P(\vec{x}, t) = \vec{p}_n(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in L(t), \quad t \geq 0,$$

де $\vec{n}$ - нормаль до контуру $L(t)$ в його точці $\vec{x}$. Дану граничну умову, яка доповнює рівняння (1), запишемо в іншій формі:

$$2\mu \text{Def } \vec{u}(\vec{x}, t) + \lambda \vec{n} \text{div } \vec{u}(\vec{x}, t) - \int_0^t \{2\mu q(t - \tau) \text{Def } \vec{u}(\vec{x}, \tau) +$$

$$+ [kh(t - \tau) - \frac{2}{3} \mu q(t - \tau)] \vec{n} \text{div } \vec{u}(\vec{x}, \tau)\} d\tau = \vec{p}_n(\vec{x}, t). \quad (2)$$

3. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Із зростанням часу $t > 0$ межа $L(t)$ області $D(t)$ зміщується. Закон зміни контуру $L(t)$ будемо описувати векторним рівнянням

$$\vec{x} = \vec{x}(l, t), \quad (3)$$

причому $\vec{x}(l, 0) = \vec{x}^0(l)$, де $\vec{x}^0(l)$ – задана неперервна функція; l – довжина контуру $L(t)$ в початковий момент часу $t = 0$ ($0 < l \leq a = \text{const}$). При цьому довжина дуги $s(l, t)$

кривої $L(t)$ обчислюється за формулою $s(l, t) = \int_0^l \left| \frac{\partial \vec{x}(l, t)}{\partial l} \right| dl$.

Нехай $\vec{v}(l, t)$ – довільна неперервна векторна функція довжини дуги l і часу t . Розв'язок задачі (1) – (2) будемо шукати у вигляді в'язкопружних потенціалів

$$\vec{u}(\vec{y}, t) = \vec{u}[\vec{f}] + \sum_{k=1}^2 \vec{e}^k \int_0^t d\tau \int_{L(\tau)} \vec{v}(l, \tau) \cdot \vec{v}^{(k)}(\vec{y} - \vec{x}; t - \tau) dl, \quad (4)$$

тут

$$\vec{u}[\vec{f}] = \sum_{k=1}^2 \vec{e}^k \int_0^t d\tau \iint_{D(\tau)} \vec{v}^{(k)}(\vec{y} - \vec{x}; t - \tau) \cdot \vec{f}(\vec{x}, \tau) ds, \quad (5)$$

контур $L(\tau)$ визначається поки що невідомою функцією (3); символами $\vec{v}^{(k)}(\vec{y} - \vec{x}; t - \tau)$ позначено фундаментальний розв'язок рівняння (6), який визначається за умови $\vec{f}(\vec{y}, t) = \vec{e}^k \delta(t - \tau) \delta(\vec{y} - \vec{x})$. Фундаментальний розв'язок виражається через дві скалярні функції $\omega(\vec{x}, t)$ і $\varphi(\vec{x}, t)$:

$$4\pi \vec{v}^{(1)}(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau) = \text{rot } \vec{e}^3 \frac{\partial \omega(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau)}{\partial x_2} + \text{grad } \frac{\partial \varphi(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau)}{\partial x_1},$$

$$4\pi \vec{v}^{(2)}(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau) = -\text{rot } \vec{e}^3 \frac{\partial \omega(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau)}{\partial x_1} + \text{grad } \frac{\partial \varphi(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau)}{\partial x_2}.$$

Покладемо $\vec{v}(l, t) = \vec{n} v_1(l, t) + \vec{s} v_2(l, t)$ і підставимо вираз (4) в граничну умову (2); приходимо до системи інтегральних рівнянь відносно компонент шуканої векторної щільності $\vec{v}(l, t)$ потенціалу

$$\pi v_1(l_0, t) + \int_{L(t)} \sum_{i=1}^2 v_i(l, t) K_{li}(l, l_0) \left| \frac{\partial \vec{x}(l, t)}{\partial l} \right| dl +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^t \tilde{k}(t-\tau) d\tau \int_{L(\tau)} \sum_{i=1}^2 v_i(l, \tau) k_{1i}(l, l_0) \left| \frac{\partial \vec{x}(l, \tau)}{\partial l} \right| dl = \psi_1(l_0, t), \\
 & \pi v_2(l_0, t) + \int_{L(t)} \sum_{i=1}^2 v_i(l, t) K_{2i}(l, l_0) \left| \frac{\partial \vec{x}(l, t)}{\partial l} \right| dl + \\
 & + \int_0^t \tilde{k}(t-\tau) d\tau \int_{L(\tau)} \sum_{i=1}^2 v_i(l, \tau) k_{2i}(l, l_0) \left| \frac{\partial \vec{x}(l, \tau)}{\partial l} \right| dl = \psi_2(l_0, t).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Вигляд ядер $K_{ij}(l, l_0)$ і $k_{ij}(l, l_0)$ цих рівняннях та функції $\tilde{k}(t)$ приведено в роботі [3].

Праві частини $\psi_1(l_0, t)$ та $\psi_2(l_0, t)$ системи рівнянь (6) є відповідно нормальною та дотичною компонентами функції

$$\vec{\psi}(l_0, t) \equiv \vec{n}_0 \psi_1(l_0, t) + \vec{s}_0 \psi_2(l_0, t) = 2\pi \vec{p}_n(l_0, t) + \vec{g}[\vec{f}],$$

де вираз $\vec{g}[\vec{f}]$ одержується із лівої частини співвідношення (2), якщо туди підставити замість $\vec{u}$ функцію (15).

4. РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ

При чисельному розв'язуванні одержаної системи інтегральних рівнянь другого роду (6) застосовується алгоритм методу "кроків за часом". Згідно з цим методом, в кожен момент часу послідовно розв'язуються два рівняння Фредгольма другого роду відносно компонент векторної щільності $\vec{v}(l, t)$. За знайденими щільностями в момент часу $t = t_k$ обчислюються переміщення $\vec{u}(\vec{x}, t_k)$ точок межі області $D(t)$. Знаючи ці переміщення, за наближеною формулою

$$\vec{x}(l, t_{k+1}) \approx \vec{u}(\vec{x}, t_k) + \vec{x}^0(l), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

визначаються координати точок рухомої межі $L(t)$ в наступний момент часу $t = t_{k+1}$. На кожному наступному кроці обчислень замість функції $\vec{u}(\vec{x}, t)$, яка міститься у виразі функції $\vec{f}(\vec{x}, t; \vec{u})$, потрібно підставляти значення, обчислені в попередній момент часу.

ВИСНОВКИ І ПЕРСПЕКТИВИ

Побудовано систему гранично-часових інтегральних рівнянь другого роду для задачі про плоскі в'язкопружні деформації. Наведено вигляд ядер цих рівнянь у випадку реологічної моделі Максвелла. Одержана система допускає покрокове (за часом) чисельне розв'язування

ПОСИЛАННЯ

1. Белоносов, С.М. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса / С.М. Белоносов, К.А. Черноус – М. Наука, 1985. – 312 с.
2. Белоносов С.М. Применение интегральных представлений к решениям задач теплопроводности и динамики вязкой жидкости/ Белоносов С.М., Овсиенко В.Г., Карачун В.Я. – К.: Выща шк., 1989. – 163 с.
3. Нецадим О.М. Граничні інтегральні рівняння для задач про плоскі деформації в'язкопружного циліндричного тіла. / Нецадим О.М., Гнучій Ю.Б. //Науковий вісник НУБіП України. Серія "Техніка та енергетика АПК". – 2011. – Вип.166, ч. 3. – С.235–242.